

稀疏分解的加权迭代方法及其初步应用

傅 霆, 尧德中

(电子科技大学生命科学与技术学院, 四川成都 610054)

摘 要: 为了在强噪声背景下提取信号, 本文发展了一种加权迭代稀疏分解方法. 从一个完备库中寻找观测信号的稀疏成分表达问题的目标函数, 可以取残差的 $l-2$ 模和稀疏成分的 $l-1$ 模的加权和最小, 通过分析噪声信号在多分辨小波分解下的性质, 得到了二尺度小波框架下不同尺度空间的加权系数的表达式; 通过分析最小 $l-1$ 模问题的求解过程, 提出了用两次迭代得到的信号成分的 $l-1$ 模的差作为迭代的收敛条件. 最后用仿真试验和真实信号验证了方法的有效性.

关键词: 稀疏分解; 多分辨小波; 最小 $l-1$ 模优化; 去噪

中图分类号: TP301 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2004) 04-0567-04

Iterative Weighted Method of Sparse Decomposition and Preliminary Application

FU Ting, YAO De-zhong

(School of Life Science & Technology, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu, Sichuan 610054, China)

Abstract: A weighted algorithm of sparse decomposition is developed for recovery of signal in strong background noise. To find the real components in a complete dictionary, the cost function can be constructed by a weighted sum of the $l-2$ norm of residual errors and $l-1$ norm of sparse components. Taking complete dictionary as the multiresolution wavelets, a feasible penalty formula is deduced according to two-scale relation of additive noise in wavelets dictionary. Analyzing the resolving process of minimum $l-1$ problem, proposed is the difference of $l-1$ norm of signal components as converge condition, where the difference is derived from the results of successive two iterative steps. The method is confirmed by both simulated and real data.

Key words: sparsity decomposition; multiresolution wavelets; minimum $l-1$ norm optimization; noise reduction

1 引言

在某些条件下, 我们需要在强的噪声背景下提取弱的信号成分, 例如, 从自发脑电背景中提取诱发电位时的信-噪比就低于 0.0 dB, 这类问题需要人们发展新的特殊方法去解决. 近年出现的稀疏分解方法显示了解决这类问题的潜力.

稀疏意味着只有很少的成分的值明显大于零^[1], Donoho 证明了可用弱 l^p 模来测量稀疏性, 并系统地论证了基于弱 l^p 的图象稀疏分解过程. Olshausen 等^[2]提出了关于图象的稀疏成分编码的思想, 且其中的稀疏成分是从信号中学习得到的. 在文献[3]中, Olshausen 和 Field 指出, 在数学概念上, 视觉过程应该是从一个包括了视觉需要解释的所有成分的过完备 (over-complete) 库中去寻找一个表达, 且对于一个单独的图象, 仅仅需要库中很少的成分就可以实现信号表达, 从而为稀疏分解阐释了一个生物学机制.

稀疏分解的这种过完备-稀疏表达的思想也被扩展到了其他领域. Lewicki 等^[4]给出了一个声音信号分析的例子. 更早一些, Chen. S. S 等^[5]曾建议用一种基于 l^1 模的 BP (Basis Pursuit) 算法来求解过完备-稀疏表达问题. Michael Zibulevsky 采用这种结构, 使用 Bayes 估计解决了一个信号盲分离问题和从多通道传感器中提取一个源信号的问题^[6,7]. 最近, Huo Xiao-ming 构造了一种新的基于 l^1 模的代价函数^[8], 使得代价函数的变量减少, 计算也更容易.

在文献[5]中, Chen. S. S 曾就使用 BP 算法解决去噪问题进行了讨论, 在最小平方误差意义下, 比较了对 BOB (Best Orthogonal Basis)、MOF (Method of Frames)、MP (Matching Pursuit) 和 BP 算法的去噪效果. 在这里, 我们以 Huo Xiao-ming 的基于 l^1 模的代价函数为基础, 通过估计噪声在小波变换下的 l^1 模的二尺度关系来修正该代价函数, 并用迭代的方法来寻找和不断修改信号的稀疏表达, 建立了一种利用稀疏分解抑制噪声

收稿日期: 2002-06-28; 修回日期: 2003-06-19

基金项目: 国家自然科学基金 (No. 90208003); 教育部博士点基金和教育部科学技术研究重点项目 (No. 2002065)

的新方法.

2 信号的稀疏分解

2.1 信号的表达

近年来,在傅立叶变换的基础上,利用多分辨分析的信号表达发展了很多新的方法,且显示了很多好的特性.把所有变换参数对应的函数的集称为‘库’,稀疏分解的库可以用小波, Gabor 小波,多分辨 Gabor 小波,小波包, Cosine 包等来构造.每一个库 D 记为 $(\Phi_r), r \in \Gamma, \Gamma$ 是一个参数.据此,信号可以分解为下面的形式:

$$s = \sum_{r \in \Gamma} \Phi_r c_r \tag{1}$$

或者分解为近似的形式

$$s = \sum_i^m \Phi_i c_i + R \tag{2}$$

R 称为余数.

有些库本身就是过完备的,如小波包, Cosine 包等,我们也可以混合上面的库得到过完备库,当然采用过完备库也意味着信号的表达不是唯一的.因此,最稀疏的解意味着信号表达最简洁的形式^[5].

实际上,在噪声背景下,当我们仅仅使用一个完备库(如多分辨小波等)时也存在一个稀疏分解问题,因为噪声常常是处处奇异的.

2.2 稀疏分解——最小 l^1 模解

稀疏性通常是用 l^0 模来测量,但是 l^0 模不是凸的,从而引起优化的混定问题,且噪声对其影响也很大.使用 l^1 模的思想可以这样描述:一个信号不能在时域和频域内同时稀疏.如果我们知道信号在一个域内是有限的(如时域),则可以在另一个域内通过解最小 l^1 模问题来找到该信号^[8],这样,该问题就转化成了求解 l^1 模最小的问题.为此可建立如下的优化问题:

$$\min_c \|C\|_1 \quad \text{满足 } \|s - \Phi C\|_2 \leq \epsilon \tag{3}$$

采用拉格朗日乘法,问题变为:

$$\min_c \|s - \Phi C\|_2^2 + \lambda \rho(C) \tag{4}$$

Huo Xiao-ming^[8]定义了一个近似的 l^1 模的表达:

$$\bar{\rho}(C, \gamma) = |C| + \frac{1}{\gamma} e^{-\gamma |C|} - \frac{1}{\gamma}, \gamma > 0 \tag{5}$$

可以看出当 $\gamma \rightarrow +\infty, \bar{\rho}(C, \gamma) \rightarrow |C|$. 由于 $\rho(C)$ 是凸的,且存在二阶导数,因此式(5)可以用牛顿法求解.对于式(4)参数 λ 的选取,可以根据下面的命题来估计:

命题:如果 \hat{C} 是问题式(4)的解,则下面的不等式成立

$$\|\Phi^T(s - \Phi \hat{C})\|_\infty \leq \frac{\lambda}{2} \tag{6}$$

3 稀疏分解的加权迭代法

3.1 高斯噪声在多分辨小波框架下的模极大性质

基于多分辨小波分析,我们可以将信号分解到子空间 $V_0, W_0, W_1, \dots,$ 和 W_{j-1} 中,这里,下标 $0 \sim j-1$ 对应于从低频到高频不同的分辨空间.对于高斯噪声,有如下的关系^[9]:

设 $n(x)$ 是实的方差为 σ^2 的高斯白噪声, ψ 是基本小波,

$W_n(s, x)$ 是 $n(x)$ 的小波变换.在尺度 s 下有:

$$E[|W_s n(s, x)|^2] = \frac{\|\psi\|^2 \sigma^2}{s} \tag{7}$$

$\|\psi\|^2, \sigma^2$ 为常数.于是得到

$$E[|W_s n(s, x)|] \geq (E[|W_s n(s, x)|^2])^{1/2} = k_1 s^{-(1/2)} \tag{8}$$

k_1 为常数.用李普西兹指数 α 来刻画,则函数 $f(x)$ 的小波变换有:

$$|W_s f(s, x)| \leq k_2 s^\alpha \tag{9}$$

k_2 为常数.一般认为信号的李普西兹指数是大于 0 的,而高斯噪声的李普西兹指数 α 为负 ($\alpha = -\frac{1}{2} - \epsilon$),因此,信号和噪声在不同尺度下的小波变换所呈现的性质是截然不同的.利用式(9),可得到高斯噪声 $n(x)$ 在每个小波尺度 s 下的系数的绝对值之和的平均值满足:

$$E(|W_s n(s, x)|) \leq k_3 s^\alpha \tag{10}$$

其中 $\alpha = -\frac{1}{2} - \epsilon_{\max}, \epsilon_{\max} = \max(\epsilon), k_3$ 为常数.

由式(8)、(10),总存在常数 $\epsilon_c \in [0, \epsilon_{\max}]$ 和 k_4 ,使得

$$E(|W_s n(s, x)|) = k_4 s^{-(1/2) - \epsilon_c} \tag{11}$$

将式(3)中的 l^1 模具体写出得

$$\|C\|_1 = \sum_{j=0}^k \|c_j\|_1 \tag{12}$$

在二尺度小波变换下,对于第 j 子空间,由式(11)得到

$$\|c_j\|_1 \propto (2^j)^{1/2 + \epsilon_c} \tag{13}$$

因此有

$$\frac{\|c_j\|_1}{\|c_{j-1}\|_1} = (2)^{1/2 + \epsilon_c} \tag{14}$$

式(14)估计出对于高斯噪声在二尺度小波框架下不同尺度空间的惩罚比.设 λ_0 为子空间 V_0 的惩罚系数,对于空间 W_j 有如下关系:

$$\lambda_j = (\delta)^{j+1} \times \lambda_0, \quad \delta \geq \sqrt{2} \tag{15}$$

根据式(14),取 δ 稍微大于 $\sqrt{2}$ 的数可以更好地工作,据此,我们将优化问题(4)的形式修改为:

$$\min_c \left\| s - \sum_{j=0}^k \Phi_j c_j \right\|_2^2 + \sum_{j=0}^k \lambda_j \rho(c_j) \tag{16}$$

3.2 稀疏分解的迭代策略

通常,考虑外加噪声的影响,信号模型有如下的形式:

$$s = x + \xi \tag{17}$$

ξ 被认为是一个高斯白噪声, x 是需要寻找的信号.

当完备库是由多分辨小波构造时,因高斯噪声是处处奇异的,它遍布于整个方程空间,从而也就破坏了信号在方程空间的稀疏性.根据优化问题式(16),整个目标函数除了 l^1 对应的稀疏性要求外,还包括了 $\|s - \Phi C\|_2^2$,因此所求得的信号成分可以看成是从原始信号中学习而来的,且仅仅是原始信号成分的一个估计.为了更好地去噪,我们在这里引入了迭代的的思想,即:对于估计得到的信号成分 C^1 ,应用小波逆变换得到 s^1 ,它是一个基于上述稀疏分解方法得到的信号的估计,然后用 s^1 代替式(16)中的 s 重新解上述优化问题而得到新的 C^2 .如此反复迭代,就可能逐渐地消除噪声而较好地估计出信号成分.

3.3 迭代法的收敛性讨论

如果信号在方程空间可以用较少的成分来表达,我们就可以用小波定义的空间中去寻找它的最稀疏的表达.式(16)是本工作从噪声背景下寻找信号成分的基本原理,当使用迭代策略去除噪声时,我们在这里取收敛条件为两次迭代的小波系数的 l^1 的差最小.下面对它表达的收敛性作如下的讨论.

设 C^1, C^2 分别是连续两次得到的估计成分,则 l^1 模的差为:

$$\Delta(\text{sparse}) = \|C^1\|_1 - \|C^2\|_1 \quad (18)$$

假设噪声是加性噪声,把待估计的成分分解成信号成分和噪声成分,则下面的不等式成立:

$$\|C\|_1 \leq \|C_s\|_1 + \|C_n\|_1 \quad (19)$$

这里,下标 s, n 分别表示信号和噪声.考虑不等式的右边,随着迭代次数的增加,若噪声成分被逐渐地消除,即 $\|C_n\|_1 \rightarrow 0$,则估计的成分中将只剩下信号成分,即

$$\|C\|_1 \approx \|C_s\|_1 \quad (20)$$

此时式(18)变成:

$$\Delta(\text{sparse}) = \|C_s^1\|_1 - \|C_s^2\|_1 \quad (21)$$

有关研究表明,当 λ_0 较小时,信号的损失很小^[8],所以两次迭代得到的信号成分的差也很小,则:

$$\|C_s^1\|_1 - \|C_s^2\|_1 \approx 0 \quad (22)$$

所以 $\Delta(\text{sparse}) \rightarrow 0$ 成立.

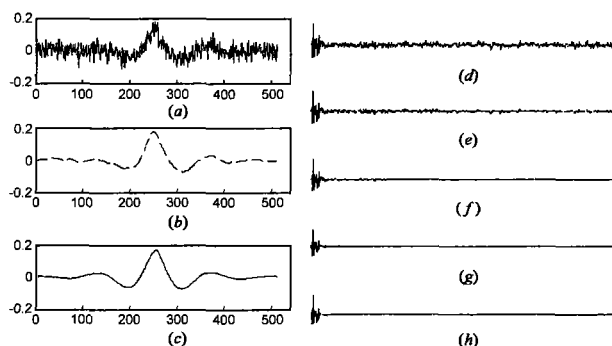


图 1 信号的迭代重构过程 (a)加噪信号;(b)估计的信号;(c)真实信号;(d)~(f)稀疏性对应于 14.5142,9.8894,4.9607 时的小波系数;(g)~(h)分别为估计的和真实的小波系数

4 仿真试验与测试

4.1 仿真试验

为了验证这种方法的效果,我们引入如下的仿真试验.试验使用的信号采用与文献[10]同样形式,它是由下式产生的一种阻尼信号:

$$x(n) = A(0.985)^{|n-256|} \cos(2\pi \cdot 0.008n), n = 0, 1, \dots, 512 \quad (23)$$

噪声为高斯白噪,完备库用标准的小波函数 symmlet-8 构造.式(15)中的参数取为 $\lambda_0 = 0.001, \delta = 1.44$.取 $\Delta(\text{sparse}) = 0.01$.仿真结果如图 1 所示,可以看出,真实信号(b)被很好地提取了出来.使用文献[7]中信号表达稀疏性的测量公式 $\|C\|_1 / \|C\|_2$, (d)~(f)对应于稀疏性为 14.5142,9.8894,

4.9607 时的小波成分,可以看出随着稀疏性的下降,信号成分被很好地保留,而噪声被逐渐地消除,在收敛时的稀疏性为 3.2626,而真实信号的稀疏性为 3.2623.图 1 中的(g)和(h)表明,该方法很好地找出了信号成分.从信-噪比(SNR)来分析,本实验处理的加噪信号的 SNR 为 -0.5(dB),而用本方法去除噪声后,SNR 达到 12.919(dB),可见方法对强噪声情况也是有效的.

为了进一步较详细地考察本方法去除强噪声的能力,同时加快收敛速度,我们取式(15)的 $\lambda_0 = 0.005, \delta = 1.44$,收敛条件为 $\Delta(\text{sparse}) = 0.05$,信号和噪声种类同上,对不同 SNR 的情况进行了研究,结果如图 2 和表 1 所示.

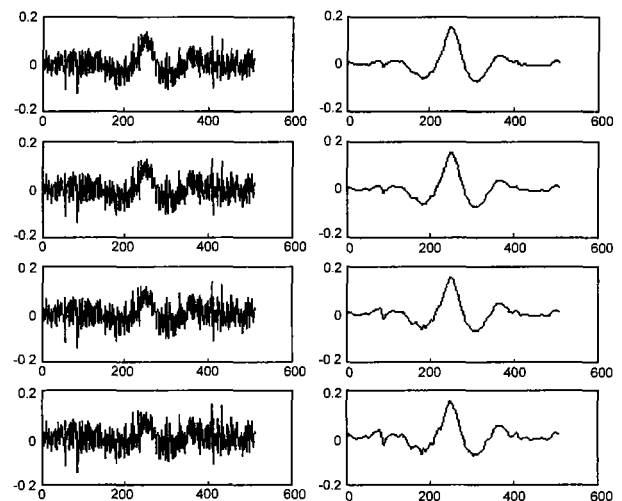


图 2 在不同强度噪声情况下的去噪效果 图中左边从上到下依次增加噪声的情况,噪声强度值见表 1,右边对应的是使用本方法提取的信号.

表 1 不同噪声情况下的重建结果

加噪信号的 SNR	估计信号的 SNR	加噪信号的稀疏性	估计的信号稀疏性
-2.0	12.472	15.095	3.2118
-4.0	11.411	15.926	3.332
-6.0	10.162	16.549	3.5811
-8.0	8.692	16.982	3.9042

结果表明本方法可以有效地将 SNR 提高 13~17dB.同样,从稀疏性的结果可以看出,该方法能够在信号的真实稀疏性附近收敛.

4.2 真实的诱发脑电数据

针对本实验室采集的视觉诱发脑电数据(VEP),其采样频率为 1000Hz,样点数为 512.图 3(a)为 10 次采集的数据的平均.为了从如图 3(a)的信号中提取出诱发脑电成分,我们取式(15)中的参数为 $\lambda_0 = 0.005, \delta = 1.44, \Delta(\text{sparse}) = 0.05$,结果如图 3(b)所示.可以看出,信噪比有了很大的提高.

5 结论

根据稀疏分解的原理,我们提出了一种加权迭代的方法,

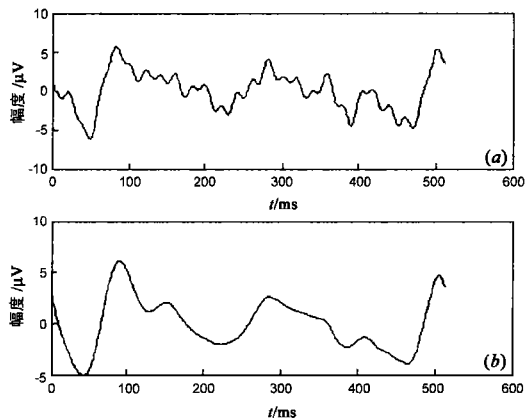


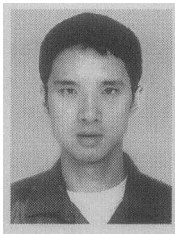
图3 视觉诱发脑电数据(VEP)的支噪效果 (a)10次平均的真实的 VEP 信号;(b)使用本方法提取的信号

使得稀疏分解过程能够有效地抑制噪声的影响。从上述的仿真结果看,这种方法对于背景噪声较强的情况,如脑电、雷达信号的提取,应具有很好的应用前景。由于稀疏分解是一种信号表达的新思想,需要做的工作还很多,比如,本文中对于收敛性的讨论,是在加权迭代方法可以消除噪声的假设下进行的,如何进行更加严格的分析是我们今后需要研究的问题。

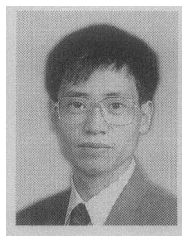
参考文献:

- [1] Donoho D L. Sparse Components of Images and Optimal Atomic Decompositions[R]. 1998. Available online at: HYPERLINK "http://www-stat.stanford" http://www-stat.stanford.edu/~donoho/Reports/
- [2] B A Olshausen, D J Field. Emergence of simple-cell receptive field properties by learning a sparse code for natural images[J]. Nature, 1996,381:607-609.
- [3] B A Olshausen, D J Field. Sparse coding with an overcomplete basis set: a strategy employed by V1[J]? Vision Research, 1997,37:3311-3325.
- [4] M Lewicki, T Sejnowski. Learning overcomplete representations[J]. Neural. Computation, 2000, 12:337-365.
- [5] Chen S S, D L Donoho, M A Saunders. Atomic decomposition by basis pursuit[J]. SIAM J. Sci Comp, 1999,20(1):33-61.
- [6] Michael Zibulevsky, Barak A Pearlmutter. Blind source separation by sparse decomposition in a signal dictionary[J]. Neural Computation, 2001,13:863-882.
- [7] Michael Zibulevsky, Yehoshua Y Zeevi. Extraction of a Source from Multichannel Data Using Sparse Decomposition[R]. Available online at: HYPERLINK "http://ie.technion.ac.il/~mcib" http://ie.technion.ac.il/~mcib
- [8] Huo Xiao-ming. Sparse Image Representation via Combined Transforms [D]. PH. D Paper of Stanford univ. 1999 Available online at: HYPERLINK "http://www.isye.gatech.edu/~xiaoming" http://www.isye.gatech.edu/~xiaoming.
- [9] Stephane Mallat. Singularity dection and processing with wavelets[J]. IEEE trans on information theory, 1992,38:617-643.
- [10] R R Gharieb, Andrzej Cichocki, et al. Noise reduction in brain evoked potentials based on third-order correlations[J]. IEEE trans on Biomedical Engineering, 2001,48:501-512.

作者简介:



傅 霆 男,1972年3月13日出生于四川南溪,1998年7月获得四川大学生物医学工程专业硕士学位,2003年12月于电子科技大学生命科学与技术学院获工学博士学位,研究领域包括生物信号检测,信号处理,小波变换等。



尧德中 男,1965年8月出生重庆,电子科技大学生命科学与技术学院院长,教授,博士生导师,发表论文近百篇(SCI 28篇, EI 30篇),著作3本.研究领域包括脑功能成像,生物医学信息处理,脑功能的认知,神经信息科学与工程,医学成像与图象处理技术,生物医学仪器等。